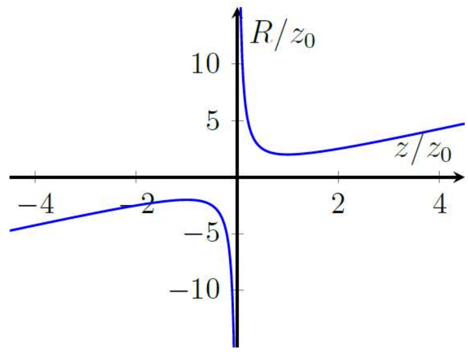
10. Tutorium

Sonntag, 19. Juni 2022 16:14

Gaußförmige Strahlen fortgesetzt:



Phasenkrümmung: Die Ausbreitung in z-Richtung bewirkt eine Krümmung der Phasenfronten

$$\exp\left(i \frac{z}{z_R} \frac{x^2+y^2}{W_0^2\left(1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right)}\right)$$ Vergleich mit Kugelwelle:

$$\exp(ikR) = \exp\left(ik\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \approx \exp(ikz)\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2z}\right)$$

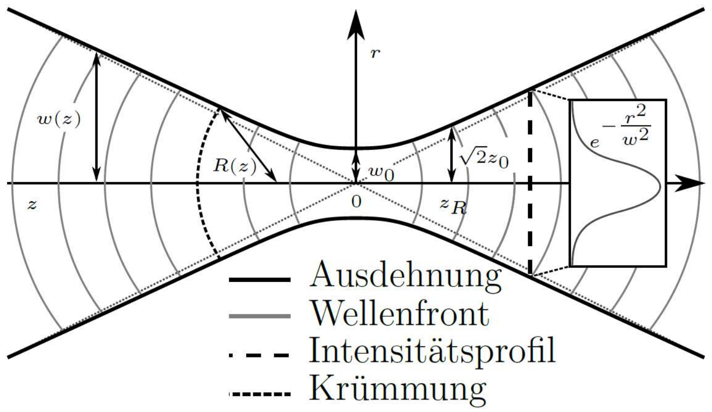
$$\approx \exp(ikz)\exp\left(ik\frac{x^2+y^2}{2R}\right)$$

$z_R \frac{\lambda}{\pi}$

$$\Rightarrow \frac{2R}{\cancel{k}} = \frac{z_R}{z} W_0^2 \left(1+\left(\frac{z}{z_R}\right)^2\right) = \frac{\cancel{2}\lambda}{\pi} z \left[\left(\frac{z_R}{z}\right)^2+1\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{R = z\left[1+\left(\frac{z_R}{z}\right)^2\right]}$$

Grenzfall: $z = 0 \Rightarrow R \to \infty$ ebene Welle
$z \to \infty \Rightarrow R \to z$ Kugelwelle



Gauß Optik mit q-Parametern

- der q-Parameter beschreibt einen Gaußstrahl
  - ↳ enthält den Krümmungsradius und die Strahlbreite am Punkt z
  - ↳ vollständige Beschreibung des Strahls
- Definition: $\boxed{q = z_F - i z_R}$ z_F - Abstand zur Strahltaille $z_R = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}$
  z_R - Rayleigh Länge

Reziprokes: $$\frac{1}{q} = \frac{1}{z_F - i z_R} = \frac{1}{R(z)} + i\frac{\lambda}{\pi}\frac{1}{W(z)^2}$$ ← Strahlbreite
↑ Krümmungsradius

Dynamik des q-Parameters:

$$\boxed{q_{out} = \frac{A q_{in} + B}{C q_{in} + D}}$$

Beispiel freier Raum $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $q_{out} = q_{in} + L$

→ Rayleigh-Länge bleibt gleich
→ Abstand von der Taille ändert sich

Ausbreitung durch eine dünne Linse: $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$

Ausbreitung durch eine dünne Linse: $\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow q_{out} = \frac{q_{in}}{-q_{in}/f + 1} \quad \Rightarrow \frac{q_{in}}{q_{out}} = 1 - \frac{q_{in}}{f}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{q_{out}} = \frac{1}{q_{in}} - \frac{1}{f}}$ Die Linse führt zu einer Veränderung des Krümmungsradius der Phasenfronten

- Weiterhin kommt es zu einer Veränderung der Rayleigh Länge $z_R = \frac{\pi}{\lambda} W_0^2$

Übungsaufgabe: Berechne die Breite der Strahltaille hinter einer Linse

↳ Annahme: kollimierter Laserstrahl $(z_R \gg 1)$

$$\frac{1}{q_{out}} = \underbrace{\frac{1}{R}}_{\approx 0} + i \frac{\lambda}{\pi} \frac{1}{W^2} - \frac{1}{f}$$

↳ für die Breite der Strahlteile brauchen wir die Rayleigh Länge $z_R = -\mathrm{Im}(q)$

$$\Rightarrow q_{out} = \frac{1}{i\frac{\lambda}{\pi W^2} - \frac{1}{f}} = \frac{-\frac{1}{f} - i\frac{\lambda}{\pi W^2}}{\frac{\lambda^2}{\pi^2 W^4} + \frac{1}{f^2}}$$

$$\Rightarrow z_R = \frac{\lambda}{\pi W^2} \frac{1}{\frac{\lambda^2}{\pi^2 W^4} + \frac{1}{f^2}} = \frac{\pi}{\lambda} W_0^2$$

↳ neue Strahltaille

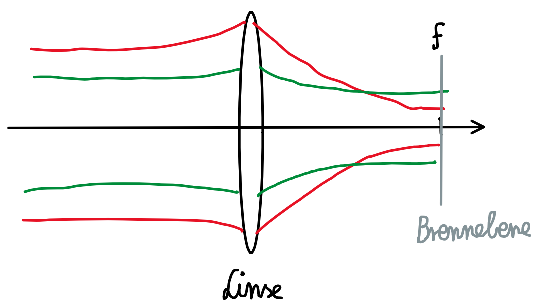
kleiner Ausdruck

$$\Rightarrow W_0 = \frac{\lambda}{\pi W} \frac{1}{\sqrt{\frac{\lambda^2}{\pi^2 W^4} + \frac{1}{f^2}}}$$

für $\frac{1}{f^2} \gg \frac{\lambda^2}{\pi^2 W^4} = \underbrace{\frac{W_0^4}{W^4}}_{<1} \underbrace{\frac{1}{z_R^2}}_{\ll 1}$ ergibt sich

$\boxed{W_0 \approx \frac{\lambda f}{\pi W}}$

- kleinere Wellenlängen lassen sich besser fokussieren
- kleinere Brennweiten fokussieren stärker
- je größer der kollimierte Strahl, desto kleiner die Taille



- Problem kurzer Brennweiten:
  → kleine Strahltaille führt zu einer kurzen Rayleigh Länge
  → starke Divergenz des Strahls!